

Friendly Contest 006 – Contest về Toán

Thời gian làm bài: 4 giờ (08h30 – 12h30, ngày 4 tháng 12 năm 2022)

STT	Tên bài	Giới hạn thời gian	Giới hạn bộ nhớ	Điểm
1.	Dãy số fibonacci	1 giây	256 MB	125
2.	Định lý $4k+3$	1 giây	256 MB	125
3.	Bất đẳng thức	1 giây	256 MB	175
4.	Tam giác và góc	1 giây	256 MB	175
5.	Gương tròn	1 giây	256 MB	200
6.	Tích ước chung lớn nhất	1 giây	256 MB	200

Bài 1. Dãy số Fibonacci

Xét một dãy số sau (có định nghĩa gần giống với dãy số Fibonacci):

$$\begin{cases} F_0 = a \\ F_1 = b \\ F_i = c \times F_{i-2} + d \times F_{i-1} \quad \forall i \geq 2 \end{cases}$$

Cho các số nguyên dương a, b, c, d, n . Hãy tính tỉ số $\frac{F_{n+1}}{F_n}$. In ra kết quả làm tròn đến 9 chữ số sau dấu thập phân.

Tính điểm

- 20% số điểm có $a = b = c = d = 1$ và $n \leq 90$.
- 40% số điểm có $a = b = c = d = 1$.
- 70% số điểm có $a, b, c, d \leq 10^9$ và $n \leq 10^5$.
- 100% số điểm có $a, b, c, d \leq 10^9$ và $n \leq 10^{18}$.

Ví dụ

Input	Output
2	1.619047619
1 1 1 1 7	1.500000000
1 1 1 1 2	

Giải thích: $F_8 = 34, F_7 = 21, F_3 = 3, F_2 = 2$.

Bài 2. Định lý $4k+3$

Trong toán học, có một định lý khá nổi tiếng mang tên Định lý $4k+3$. Định lý phát biểu như sau: “Mọi số nguyên dương có dạng $4k+3$ đều có một ước nguyên dương có dạng $4k+3$.”.

Nghiên cứu sâu hơn về định lý này, Q. phát hiện ra rằng định lý không chỉ đúng với mỗi trường hợp $4k+3$ mà còn đúng với một số trường hợp khác như $2k+1$ hay $6k+5$. Q. muốn nhờ bạn kiểm tra xem định lý còn đúng với một trường hợp có dạng $nk-1$ nào khác không bằng cách giải quyết bài toán sau: Cho số nguyên dương n , tìm một cặp số nguyên dương (u, v) sao cho $0 \leq u, v < n-1$ và $u \times v + 1 \vdots n$.

Đầu vào

- Dòng đầu tiên là một số nguyên dương $T \leq 10$, miêu tả số truy vấn.
- T dòng tiếp theo, mỗi dòng là một số nguyên dương n .

Đầu ra

- Gồm T dòng, trên mỗi dòng là kết quả của truy vấn tương ứng. Nếu không tìm được bộ (u, v) thì in ra hai số -1. Nếu tìm được, in ra bộ bất kỳ.

Tính điểm

- 20% số điểm có $n \leq 1000$.
- 50% số điểm có $n \leq 10^6$.
- 80% số điểm có $n \leq 10^9$.
- 100% số điểm có $n \leq 10^{18}$.

Ví dụ

Input	Output
4	-1 -1
2	-1 -1
4	-1 -1
6	3 5
8	

Bài 3. Bất đẳng thức

Cho hai số nguyên dương n và k . Tìm giá trị $T = (x_1^2 - x_1)(x_2^2 - x_2) \dots (x_k^2 - x_k)$ lớn nhất có thể đạt được, sao cho $x_i \neq x_j$ với mọi cặp i, j , $x_i > 0$ với mọi i , và $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$.

Đầu vào

- Dòng đầu tiên là một số nguyên dương $T \leq 1000$, miêu tả số truy vấn.
- T dòng tiếp theo, mỗi dòng là hai số nguyên dương n và k .

Đầu ra

- Gồm T dòng, trên mỗi dòng là số dư của giá trị T tối đa tìm được sau khi chia lấy dư cho $10^9 + 7$; hoặc -1 nếu không tìm được bất kỳ bộ số nào thoả mãn yêu cầu đề bài.

Tính điểm

- 50% số điểm có $n, k \leq 500$.
- 100% số điểm có $n \leq 10^9$, $k \leq 10^4$.

Ví dụ

Input	Output
2	12
5 2	24

Bài 4. Tam giác và góc

Bạn được cho một dãy số nguyên dương và bạn cần chọn ra ba phần tử phân biệt x, y, z sao cho tồn tại ba điểm không thẳng hàng X, Y, Z và $XY = a_z, XZ = a_y, YZ = a_x, \cos(\widehat{YXZ}) \geq \frac{p}{Q}$ và $\widehat{YXZ}$ lớn nhất có thể.

Đầu vào

- Dòng đầu tiên là ba số nguyên dương n, P, Q ($n \leq 1000, 1 \leq a_i, Q \leq 10^4, |P| \leq Q$).
- Dòng tiếp theo gồm n số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Đầu ra

- In ra ba số nguyên x, y, z hoặc -1 nếu không tồn tại lời giải. Nếu có nhiều đáp án, in ra đáp án bất kỳ.

Tính điểm:

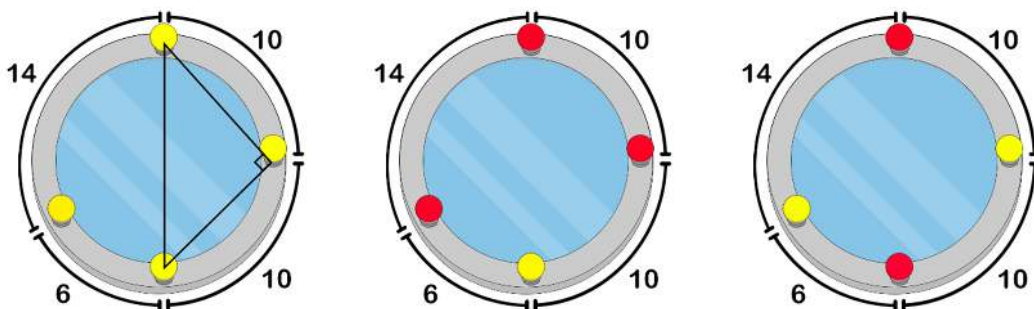
- 40% số điểm có $n \leq 100$.
- 60% số điểm còn lại không có giới hạn gì thêm.

Ví dụ

Input	Output
4 1 2 6 6 6 7	1 2 3
3 5 7 1 3 8	-1

Bài 5: Gương tròn

Cho N bóng đèn sắp xếp quanh một chiếc gương tròn, được đánh số từ 1 đến N theo chiều kim đồng hồ, bóng đèn thứ i cách bóng đèn thứ $i + 1$ một khoảng cách D_i , và bóng đèn N cách bóng đèn 1 một khoảng cách D_N . Mỗi bóng đèn có thể bật với M màu khác nhau, nhưng không thể có 3 bóng đèn nào tạo thành một tam giác vuông và bật cùng một màu.



Các hình trên đây mô tả các trạng thái đèn khác nhau với $N = 4$, $K = 2$, $D = (10; 10; 6; 14)$. Hình 1 là một trạng thái không hợp lệ, hai hình còn lại là các trạng thái hợp lệ.

Nhiệm vụ của bạn là đếm số trạng thái hợp lệ của các đèn từ các số N , K và dãy D cho trước.

Giới hạn: $N, K \leq 3 \times 10^5$, $D_i \leq 10^9$.

Đầu vào:

- Dòng đầu tiên là hai số nguyên dương N , K .
- Dòng tiếp theo là N số nguyên dương mô tả dãy D .

Đầu ra:

- Một số nguyên dương duy nhất là kết quả bài toán sau khi chia lấy dư cho 998 244 353.

Ví dụ

Input	Output
4 2 10 10 6 14	10
1 2 10	2

Bài 6: Tích ước chung lớn nhất

Cho một dãy số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_N$. Xét một tập S khác rỗng bất kỳ là con của tập hợp $\{1; 2; \dots; N\}$. Gọi $g_S = \gcd(a_{S_1}, a_{S_2}, \dots, a_{S_l})$ với l là số phần tử của S . Gọi P là tích các giá trị g_S với mọi tập hợp S . Tính giá trị P và in ra giá trị này sau khi chia lấy dư cho $10^9 + 7$.

Đầu vào

- Dòng đầu tiên là số nguyên dương N .
- Dòng tiếp theo là N số nguyên dương mô tả dãy a .

Đầu ra

- Một dòng duy nhất là giá trị P sau khi chia lấy dư cho $10^9 + 7$.

Tính điểm

- 30% số điểm có $n \leq 20$.

- 30% số điểm khác có a_i đôi một phân biệt.
- 100% số điểm có $n \leq 10^5, a_i \leq 10^5$.

Ví dụ

<i>Input</i>	<i>Output</i>
1 1	1
3 2 2 2	128

Giải thích test ví dụ 2: Với mỗi S là tập con của tập $\{1; 2; 3\}$, $g_S = 2$. Vậy kết quả bài toán là $2^7 = 128$, vì có 7 tập con khác rỗng của tập $\{1; 2; 3\}$.