

Đề thi vòng loại TLEOJ Cup 2024 – Ngày thi thứ ba (20/04/2024)

Tổng quan

	Tên bài	Mã nguồn	Dữ liệu vào	Dữ liệu ra
Câu 1	Lại là làm tròn xuống	FLOOR.*	FLOOR.inp	FLOOR.out
Câu 2	Những cánh điều	KITES.*	KITES.inp	KITES.out
Câu 3	Hamburger và truy vấn	HAMBURGER.*	HAMBURGER.inp	HAMBURGER.out
Câu 4	Another sussy problem	AMOGUS.*	AMOGUS.inp	AMOGUS.out

Dấu * trong tên tệp ở cột Mã nguồn có thể được thay bởi phần mở rộng của các ngôn ngữ Pascal (.pas), C++ (.cpp), Python (.py).

Các tệp dữ liệu vào và dữ liệu ra thuộc cùng một thư mục với tệp mã nguồn. Tệp mã nguồn, dữ liệu vào và dữ liệu ra đều là các tệp văn bản.

Thí sinh có thời gian làm bài là **180** phút. Với mỗi câu, thí sinh được nộp không quá **03** lần.

Các giới hạn về thời gian và bộ nhớ của mỗi bài sẽ được đề cập riêng ở từng bài.

Đề thi gồm **08** trang, **04** câu, mỗi câu có giá trị **100** điểm.

Câu 1. Lại là làm tròn xuống (100 điểm)

Mã nguồn	Dữ liệu vào	Dữ liệu ra	Thời gian	Bộ nhớ
FLOOR.*	FLOOR.inp	FLOOR.out	1 giây	1024 MB

Chắc các bạn đã quá quen thuộc với dạng bài toán sau: Cho một số nguyên dương n , hãy tính tổng của $\lfloor \frac{n}{1} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n}{n} \rfloor$ (Với $\lfloor z \rfloor$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá z . Ví dụ: $\lfloor 6,9 \rfloor = 6, \lfloor 4,2 \rfloor = 4$). Nhưng hôm nay, chúng tôi sẽ cho bạn một biến thể của dạng bài toán trên. Bài toán như sau:

Cho một số nguyên dương n , nhiệm vụ của bạn là hãy đếm số lượng ước của tích $\lfloor \frac{n}{1} \rfloor \times \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times \dots \times \lfloor \frac{n}{n} \rfloor$. Vì kết quả có thể rất lớn nên hãy xuất kết quả sau khi chia lấy dư cho 998244353.

Dữ liệu vào: Nhập từ file FLOOR.inp:

- Dòng đầu tiên gồm duy nhất một số nguyên dương t là số bộ dữ liệu cần xử lý ($1 \leq t \leq 2024$).
- Sau đó là t dòng, mỗi dòng gồm duy nhất một số nguyên dương n mô tả một bộ dữ liệu ($1 \leq n \leq 2024^2$).

Dữ liệu ra: Ghi ra file `FLOOR.out`:

- Với mỗi bộ dữ liệu, in ra duy nhất một giá trị là kết quả của bộ dữ liệu đó trên một dòng sau khi chia lấy dư cho 998244353.

Ràng buộc bổ sung:

- 15% số điểm có $n \leq 45$.
- 20% số điểm có $t \leq 30, n \leq 2024$.
- 20% số điểm có $t \leq 10, n \leq 5 \times 10^4$.
- 15% số điểm có $t \leq 3$.
- 15% số điểm có $t \leq 15$.
- 15% số điểm còn lại không có giới hạn gì thêm.

Ví dụ:

FLOOR.inp	FLOOR.out	Giải thích
5	1	Trong bộ dữ liệu thứ nhất, tích $\left[\frac{1}{1}\right] = 1$ có duy nhất 1 ước là 1.
1	2	
2	2	Trong bộ dữ liệu thứ hai, tích $\left[\frac{2}{1}\right] \times \left[\frac{2}{2}\right] = 2 \times 1 = 2$ có 2 ước là 1 và 2.
3	4	
4	4	Trong bộ dữ liệu thứ ba, tích $\left[\frac{3}{1}\right] \times \left[\frac{3}{2}\right] \times \left[\frac{3}{3}\right] = 3 \times 1 \times 1 = 3$ có 2 ước là 1 và 3.
5		Trong bộ dữ liệu thứ tư, tích $\left[\frac{4}{1}\right] \times \left[\frac{4}{2}\right] \times \left[\frac{4}{3}\right] \times \left[\frac{4}{4}\right] = 4 \times 2 \times 1 \times 1 = 8$ có 4 ước là 1,2,4,8.
		Trong bộ dữ liệu thứ năm, tích $\left[\frac{5}{1}\right] \times \left[\frac{5}{2}\right] \times \left[\frac{5}{3}\right] \times \left[\frac{5}{4}\right] \times \left[\frac{5}{5}\right] = 5 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 10$ có 4 ước là 1,2,5,10.

Câu 2. Những cánh điều (100 điểm)

Mã nguồn	Dữ liệu vào	Dữ liệu ra	Thời gian	Bộ nhớ
KITES.*	KITES.inp	KITES.out	1 giây	1024 MB

Một câu chuyện không có thật về quá trình ra đề của các thành viên trong ban ra đề kỳ thi TLEOJ Cup 2024...

Vào một buổi chiều nọ, trong lúc chuẩn bị cho kỳ thi TLEOJ Cup 2024, các thành viên trong ban ra đề do mệt quá nên đã quyết định rủ nhau đi ra ngoài ngắm cảnh cho khuây khỏa. Lúc bọn họ ra ngoài thì phát hiện trên bầu trời có n con điều, với con điều thứ i đang bay ở độ cao H_i . Do họ đều có trí tưởng tượng ghép cặp, đẩy thuyền cực kỳ phong

phú (theo cảm nhận của người kể chuyện) nên họ đã “sáng tác” ra định nghĩa về *độ tương đồng* của hai con điều bất kỳ như sau:

- Gọi độ cao của con điều thứ nhất là H_1 , độ cao của con điều thứ hai là H_2 .
- Vì các con điều này rất khó kiểm soát nên khi bị ảnh hưởng bởi *độ biến thiên* v bất kỳ, độ cao của hai con điều sẽ đổi thành lần lượt là $H_1 \oplus v, H_2 \oplus v$ (phép toán $\oplus$ tương đương với phép toán bit XOR).
- Khi đó, *độ tương đồng* của hai con điều đó (có thể biểu diễn bằng hàm $f(H_1, H_2)$) là chênh lệch độ cao nhỏ nhất khi xét mọi *độ biến thiên* v không âm.
- Nói cách khác, *độ tương đồng* của hai con điều với độ cao lần lượt là H_1 và H_2 bằng:

$$f(H_1, H_2) = \min_{v \in \mathbb{N}} |(H_1 \oplus v) - (H_2 \oplus v)|$$

Các thành viên trong ban ra đề do quá rảnh rỗi nên họ muốn tìm tổng *độ tương đồng* của tất cả cặp điều. Nói cách khác, họ muốn tính giá trị của $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n f(H_i, H_j)$. Thế nhưng do có quá nhiều điều nên họ không có thời gian để xác định hết (họ còn bận ra đề mà), nên họ đã quyết định để vấn đề này làm bài toán cho kỳ thi TLEOJ Cup.

Yêu cầu: Hãy xác định tổng *độ tương đồng* của tất cả cặp điều trong n con điều. Vì kết quả có thể rất lớn nên hãy xuất kết quả sau khi chia lấy dư cho 998244353.

Dữ liệu vào: Nhập từ file KITES.inp:

- Dòng đầu tiên gồm duy nhất một số nguyên dương n là số lượng con điều ($1 \leq n \leq 10^6$).
- Dòng thứ hai gồm n số nguyên không âm $H_1, H_2, \dots, H_n$ tương đương với độ cao của các con điều ($0 \leq H_i < 2^{30}$).

Dữ liệu ra: Ghi ra file KITES.out:

- In ra duy nhất một giá trị trên một dòng là kết quả của bài toán sau khi chia lấy dư cho 998244353.

Ràng buộc bổ sung:

- 10% số điểm có $H_i < 2$.
- 10% số điểm có $n \leq 500, H_i < 2^8$.
- 10% số điểm có $H_i < 2^8$.
- 10% số điểm có $n \leq 2024$.
- 20% số điểm có $n \leq 10^4$.
- 20% số điểm có $n \leq 10^5$.
- 20% số điểm còn lại không có giới hạn gì thêm.

Ví dụ:

KITES.inp	KITES.out	Giải thích
3 7 7 2007	96	Xét cặp điều với cùng độ cao 7, rõ ràng cho dù có chọn bất kỳ <i>độ biến thiên</i> nào thì chúng vẫn có độ cao bằng nhau nên $f(7,7) = 0$. Xét cặp điều có độ cao lần lượt là 7 và 2007, phương án tối ưu nhất là chọn <i>độ biến thiên</i> $v = 1008$. Khi đó, chênh lệch đạt giá trị tối thiểu là $(7 \oplus 1008) - (2007 \oplus 1008) = 1015 - 1063 = 48$. Vậy $f(7,2007) = 48$. Kết quả là $f(H_1, H_2) + f(H_1, H_3) + f(H_2, H_3) = f(7,7) + f(7,2007) + f(7,2007) = 0 + 48 + 48 = 96$.
4 1 2 3 4	10	Ta có: - $f(H_1, H_2) = f(1,2) = 1$. - $f(H_1, H_3) = f(1,3) = 2$. - $f(H_1, H_4) = f(1,4) = 3$. - $f(H_2, H_3) = f(2,3) = 1$. - $f(H_2, H_4) = f(2,4) = 2$. - $f(H_3, H_4) = f(3,4) = 1$. Kết quả là $1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 1 = 10$.
9 6 2 5 5 5 1 1 8 1	90	
6 10 1 2010 13 1 2010	345	

Câu 3. Hamburger và truy vấn (100 điểm)

Mã nguồn	Dữ liệu vào	Dữ liệu ra	Thời gian	Bộ nhớ
HAMBURGER.*	HAMBURGER.inp	HAMBURGER.out	1,5 giây	1024 MB

P là một người rất thích ăn hamburger. Một hôm, P đến cửa hàng của K thì phát hiện chỉ còn một cái hamburger. K thấy thế liền thách thức P phải giải được bài toán mà K đưa ra thì mới có thể lấy hamburger, còn không thì K sẽ bán cho người khác. P nghe thế thì lập tức đồng ý, nhưng vì quá mệt nên P không còn đủ sức để giải toán nữa. Các bạn hãy giúp P nhé!

Bài toán như sau:

Xâu nhị phân là xâu ký tự chỉ bao gồm hai loại ký tự là 0 và 1.

Một đoạn con của xâu s là một xâu con bao gồm các ký tự liên tiếp trong xâu s . Trong bài toán này, ta sẽ định nghĩa $s(l, r) = s_l s_{l+1} \dots s_r$.

Khoảng cách hamming của hai xâu a và b có cùng độ dài n là số lượng giá trị i thỏa mãn $1 \leq i \leq n, a_i \neq b_i$. Ví dụ: Khoảng cách hamming của hai xâu là 0011 và 1010 bằng 2 do có hai giá trị i thỏa mãn là 1 và 4.

Gọi $f(s)$ là tổng khoảng cách hamming của tất cả cặp đoạn con có độ dài bằng nhau trong xâu s (không tính các cặp đoạn con trùng nhau). Ví dụ: $f(010) = 4$ do:

- Cặp đoạn con $s(1,1) = 0$ và $s(2,2) = 1$ có khoảng cách hamming là 1.
 - Cặp đoạn con $s(1,1) = 0$ và $s(3,3) = 0$ có khoảng cách hamming là 0.
 - Cặp đoạn con $s(2,2) = 1$ và $s(3,3) = 0$ có khoảng cách hamming là 1.
 - Cặp đoạn con $s(1,2) = 01$ và $s(2,3) = 10$ có khoảng cách hamming là 2.
- $\Rightarrow f(010) = 1 + 0 + 1 + 2 = 4$.

Bạn được cho một xâu nhị phân s độ dài n . Bạn cần phải thực hiện q truy vấn thuộc một trong hai dạng như sau:

- 1 l r : Đảo bit tất cả ký tự trong đoạn $[l, r]$, tức là với mọi giá trị i thỏa mãn $l \leq i \leq r$, nếu $s_i = 0$ thì đổi lại thành $s_i = 1$ và ngược lại.
- 2 l r : Tính giá trị của $f(s(l, r))$.

Yêu cầu: Hãy xác định kết quả của tất cả truy vấn loại 2. Vì kết quả có thể rất lớn nên hãy xuất kết quả sau khi chia lấy dư cho 998244353.

Dữ liệu vào: Nhập từ file HAMBURGER.inp:

- Dòng đầu tiên gồm hai số nguyên dương n, q là độ dài của xâu s và số truy vấn ($1 \leq n, q \leq 2 \times 10^5$).
- Dòng thứ hai gồm duy nhất một xâu s độ dài n chỉ bao gồm các ký tự 0 và 1.
- Cuối cùng là q dòng, mỗi dòng chứa một trong hai truy vấn được miêu tả ở trên:
 - 1 l r : Tương ứng với việc thực hiện đảo bit tất cả ký tự trong đoạn $[l, r]$, tức là với mọi giá trị i thỏa mãn $l \leq i \leq r$, nếu $s_i = 0$ thì đổi lại thành $s_i = 1$ và ngược lại.
 - 2 l r : Tương ứng với việc bạn phải tính giá trị của $f(s(l, r))$.
- Dữ liệu đảm bảo có ít nhất một truy vấn loại 2.

Dữ liệu ra: Ghi ra file HAMBURGER.out:

- Với mỗi truy vấn loại 2, in ra giá trị của $f(s(l, r)) \bmod 998244353$ trên một dòng.

Ràng buộc bổ sung:

- 5% số điểm có $n \leq 100, q = 1, l = 1, r = n$.
- 5% số điểm có $n \leq 500, q = 1, l = 1, r = n$.
- 5% số điểm có $n \leq 10^4, q = 1, l = 1, r = n$.

- 10% số điểm có $q = 1, l = 1, r = n$.
- 5% số điểm có $n, q \leq 100$
- 10% số điểm có $n, q \leq 500$.
- 10% số điểm có $n, q \leq 10^4$
- 25% số điểm có $n, q \leq 10^5$.
- 25% số điểm còn lại không có giới hạn gì thêm.

Ví dụ:

HAMBURGER.inp	HAMBURGER.out	Giải thích
3 6 010 2 1 3 1 2 3 2 1 3 2 1 2 1 2 2 2 1 3	4 3 0 3	Trong truy vấn thứ nhất, $s(1,3) = 010$ nên $f(s(1,3)) = f(010) = 4$ (đã giải thích ở phần đề bài). Sau truy vấn thứ hai, $s = 001$. Trong truy vấn thứ ba, $s(1,3) = 011$, ta có: - Cặp đoạn con $s(1,1)$ và $s(2,2)$ có khoảng cách hamming là 0. - Cặp đoạn con $s(1,1)$ và $s(3,3)$ có khoảng cách hamming là 1. - Cặp đoạn con $s(2,2)$ và $s(3,3)$ có khoảng cách hamming là 1. - Cặp đoạn con $s(1,2)$ và $s(2,3)$ có khoảng cách hamming là 1. Vậy, kết quả cho truy vấn thứ ba là $0 + 1 + 1 + 1 = 3$. Trong truy vấn thứ tư, khoảng cách hamming của cặp đoạn con $s(1,1)$ và $s(2,2)$ là 0 nên kết quả cho truy vấn thứ tư là 0.

Câu 4. Another sussy problem (100 điểm)

Mã nguồn	Dữ liệu vào	Dữ liệu ra	Thời gian	Bộ nhớ
AMOGUS.*	AMOGUS.inp	AMOGUS.out	1 giây	1024 MB

❖ ❖ ❖

Các [crewmate](#) đang thực hiện nhiệm vụ sửa tàu trên con tàu Mira HQ. Con tàu bao gồm n phòng, phòng thứ i ($2 \leq i \leq n$) sẽ có đường đi trực tiếp nối với đỉnh $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$. Nói cách khác, cấu trúc của con tàu có thể biểu diễn dưới dạng một cây nhị phân. Mỗi phòng sẽ

có một **crewmate** với nhiệm vụ sửa chữa tại phòng đó, tức là có tổng cộng n **crewmate** đang làm nhiệm vụ trên tàu.

Biết được tin này, các **imposutor** đã quyết định sẽ cử một số người trà trộn vào trong số n **crewmate** đó. Cụ thể, ở một số phòng sẽ không có **crewmate** mà chỉ có **imposutor**. Ta có thể biểu diễn vị trí của các **imposutor** bằng một dãy số S là dãy con của dãy $\{1, 2, \dots, n\}$. Với mọi i từ 1 đến n , nếu $i \in S$ thì phòng thứ i có **imposutor**, ngược lại thì phòng thứ i có **crewmate**.

Các **imposutor** thay vì đi sửa tàu sẽ có nhiệm vụ đi ám sát các **crewmate** tại các phòng. Nhưng thay vì họ tự tay đi ám sát, họ sẽ ám sát thành cặp, do sợ về việc **crewmate** có thể bỏ chạy hay một số lý do khác nào đó mà họ có thể bị lộ danh tính. Các **imposutor** sẽ ghép cặp và ám sát **crewmate** theo cách sau:

- Chọn 1 phòng i ($1 \leq i \leq n$) bất kỳ có **crewmate**.
- Chọn 2 **imposutor** đang ở lần lượt tại 2 phòng là j và k ($1 \leq j, k \leq n, j \neq k$) sao cho j có thể di chuyển lên đỉnh $2i$, k có thể di chuyển lên đỉnh $2i + 1$ chỉ bằng việc di chuyển trên các đường đi hướng tới các phòng có số hiệu nhỏ hơn.
- Khi đó, hai **imposutor** đều có thể trực tiếp đến phòng i và ám sát **crewmate** tại phòng đó. Sau đó, họ trở về phòng cũ.

Ví dụ với cấu trúc tàu như sau (với $n = 5$):

Giả sử **imposutor** đang ở hai phòng là 4 và 3 thì họ có thể ám sát **crewmate** tại phòng 1 do **imposutor** tại phòng 4 có thể di chuyển lên phòng $2 \times 1 = 2$ theo lộ trình: $4 \rightarrow 2$, còn **imposutor** tại phòng 3 đã ở sẵn phòng $2 \times 1 + 1 = 3$ nên họ đều có thể lên phòng 1 trực tiếp và ám sát **crewmate** tại phòng đó.

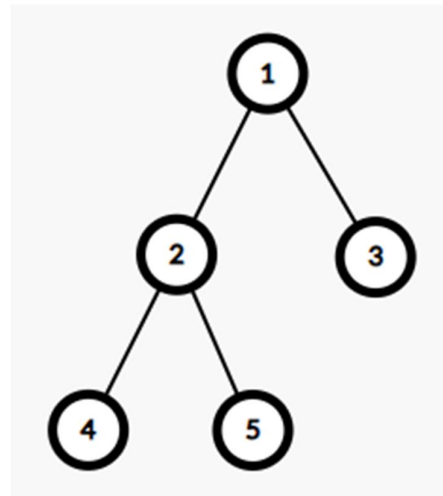
Giả sử **imposutor** đang ở hai phòng là 1 và 4 thì họ không thể ám sát **crewmate** tại phòng 2 do:

- Nếu **imposutor** tại phòng 4 muốn di chuyển tới phòng $2 \times 2 + 1 = 5$ theo phương án trên thì điều đó là không thể, do **imposutor** phải đi theo lộ trình: $4 \rightarrow 2 \rightarrow 5$, mà $5 > 2$ nên phương án không hợp lệ.

- Do đó, **imposutor** phải ở lại phòng $2 \times 2 = 4$ và để cho **imposutor** tại phòng 1 đến phòng 5, nhưng đó cũng là điều bất khả thi.

Nhiệm vụ của các **imposutor** phải hoàn thành là chiếm hết các phòng từ l đến r ($1 \leq l \leq r \leq n$). Một phòng được cho là bị chiếm khi phòng không còn có **crewmate** sửa chữa tại phòng đó. Họ đang thắc mắc xem có bao nhiêu cách bố trí **imposutor** sao cho tồn tại phương án ám sát để hoàn thành được nhiệm vụ trên. Là một thành viên trong nhóm **imposutor**, hãy giúp mọi người đếm số cách thỏa mãn nhé!

Yêu cầu: Đếm số cách phân bố **imposutor** sao cho tất cả các phòng từ l đến r đều bị chiếm. Vì kết quả có thể rất lớn nên hãy xuất kết quả sau khi chia lấy dư cho 998244353.



Dữ liệu vào: Nhập từ file AMOGUS.inp:

- Dòng đầu tiên gồm duy nhất một số nguyên dương t là số bộ dữ liệu cần xử lý ($1 \leq t \leq 2 \times 10^5$).
- Sau đó là t dòng, mỗi dòng gồm 3 số nguyên dương n, l, r mô tả một bộ dữ liệu ($1 \leq l \leq r \leq n \leq 10^{18}$).

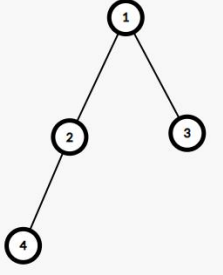
Dữ liệu ra: Ghi ra file AMOGUS.out:

- Với mỗi bộ dữ liệu, in ra duy nhất một giá trị là kết quả của bộ dữ liệu đó trên một dòng sau khi chia lấy dư cho 998244353.

Ràng buộc bổ sung:

- 15% số điểm có $t \leq 30, n \leq 16$.
- 10% số điểm có $n \leq 16$.
- 10% số điểm có $l = r = 1$.
- 10% số điểm có $l = r$.
- 20% số điểm có $t \leq 500, n \leq 10^5$.
- 20% số điểm có $t \leq 2 \times 10^4$.
- 15% số điểm còn lại không có giới hạn gì thêm.

Ví dụ:

AMOGUS.inp	AMOGUS.out	Giải thích
3 4 1 4 4 1 1 4 3 4	2 11 4	Sơ đồ của con tàu trong ba bộ dữ liệu đều có dạng như hình bên.  Trong bộ dữ liệu đầu tiên, các phòng 2,3,4 đều phải bị chiếm, phòng 1 có thể chiếm hoặc không. Như vậy có 2 cách thỏa mãn. Trong bộ dữ liệu thứ hai, có 11 cách phân bố imposustor thỏa mãn là: {3,4}; {2,3}; {2,3,4}; {1}; {1,4}; {1,3}; {1,3,4}; {1,2}; {1,2,4}; {1,2,3}; {1,2,3,4}. Trong bộ dữ liệu thứ ba, có 4 cách thỏa mãn là: {3,4}; {2,3,4}; {1,3,4}; {1,2,3,4}.

--- Hết ---

Thí sinh không được sử dụng tài liệu.
Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.